# Chapitre 7 : Systèmes d'équations linéaires
# Feuille d'exercices



**Des systèmes :**

**Exercice 1** Résoudre les systèmes linéaires suivants en précisant leurs rangs :

$$(S_1):\begin{cases} x & -y & & = 0 \\ -3x & +4y & +2z & = 5 \\ -2x & +3y & +z & = 3 \end{cases} \quad (S_2):\begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 2 \\ 4x & +y & +z & = 3 \end{cases} \quad (S_3):\begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ 4x & -y & -z & = 3 \end{cases}$$

$$(S_4):\begin{cases} x & +y & +2z & = 4 \\ & y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 8 \end{cases} \quad (S_5):\begin{cases} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 9x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{cases} \quad (S_6):\begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ x & + & y & - & z & = & 3 \end{cases}$$

$$(S_7):\begin{cases} x & +y & +z & -t & = 1 \\ x & -y & -z & +t & = 2 \\ x & -y & -z & -t & = 3 \end{cases} \quad (S_8):\begin{cases} x & +2y & +2z & -t & = 3 \\ 2x & +4y & +6z & -2t & = 6 \\ -2x & -3y & -4z & +2t & = -4 \\ x & & -z & -t & = -1 \end{cases}$$

**Exercice 2 (calculatoire)** Résoudre les systèmes suivants et préciser leur rang

$$(S_5):\begin{cases} x & +y & +z & -t & = 1 \\ x & -y & -z & +t & = 2 \\ x & -y & -z & -t & = 3 \end{cases} \quad (S_6):\begin{cases} x & +2y & +2z & -t & = 3 \\ 2x & +4y & +6z & -2t & = 6 \\ -2x & -3y & -4z & +2t & = -4 \\ x & & -z & -t & = -1 \end{cases}$$

$$(S_7):\begin{cases} x & +3y & +5z & -4t & & = 1 \\ x & +3y & +3z & -2t & +w & = -1 \\ x & -2y & +z & -t & -w & = 3 \\ x & -4y & +z & +t & -w & = 3 \\ x & +2y & +z & -t & +w & = -1 \end{cases} \quad (S_8):\begin{cases} x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{3}z & +\frac{1}{4}t & = 1 \\ x & -\frac{1}{3}y & +\frac{1}{2}z & +t & = 2 \\ 2x & +\frac{1}{6}y & +\frac{5}{6}z & +\frac{5}{4}t & = 3 \\ 2x & -\frac{2}{3}y & +z & +2 & = 4 \\ 4x & +\frac{7}{6}y & +\frac{3}{2}z & +\frac{7}{4}t & = 5 \end{cases}$$

{

**Exercice 3** Equilibrez la réaction chimique suivante :

$$x\mathrm{NaOH} + y\mathrm{Br}_2 \longrightarrow z\mathrm{NaBrO}_3 + t\mathrm{NaBr} + s\mathrm{H}_2\mathrm{O}$$

**Exercice 4** On observe le relevé de note suivant :

| Candidat | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Histoire géo | 12 | 6 | 16 |
| Culture Gé | 7 | 11 | 11 |
| Mathématiques | 6 | 10 | 14 |
| Moyenne | 8 | 9 | 14 |

Quels sont les coefficients associés à chaque discipline ?

**Exercice 5** En fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, résoudre les systèmes suivants et donner le rang :

1. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=m \\ -2x+4y-2z=m^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x+3y=mx \\ x+3y=my \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z=m \\ x+my-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

**Des matrices :**

**Exercice 6** Déterminer lorsqu'il existe l'inverse des matrices et précisez leur rang :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7** Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ si les matrices suivantes sont inversibles :

$$A=\begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

**Exercice 8** Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ et exprimer $A^2$ comme combinaison linéaire de $A$ et de $I_3$.
2. En déduire que $A$ est inversible. Exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et $I_3$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$. Donner une relation de récurrence liant $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ à $a_n$ et $b_n$.
4. Montrer que $(a_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$, puis $A^n$ en fonction de $n, A, I_3$.
5. Calculer $B^2$. En déduire $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ .
6. Les formules pour $A^n$ et $B^n$ sont-elles valables pour $n = -1$ ?
7. Donner l'expression de $A$ en fonction de $B$ et de $I_3$.
8. Retrouver l'expression de $A^n$ à l'aide de la formule du Binôme ($n \in \mathbb{N}$).

# Chapitre 7 : Systèmes d'équations linéaires
# Feuille d'exercices



**Des systèmes :**

**Exercice 1** Résoudre les systèmes linéaires suivants en précisant leurs rangs :

$$(S_1):\begin{cases} x & -y & & = 0 \\ -3x & +4y & +2z & = 5 \\ -2x & +3y & +z & = 3 \end{cases} \quad (S_2):\begin{cases} 2x & +y & -z & = 1 \\ x & -y & +z & = 2 \\ 4x & +y & +z & = 3 \end{cases} \quad (S_3):\begin{cases} 2x & +y & +z & = 1 \\ x & -y & -z & = 2 \\ 4x & -y & -z & = 3 \end{cases}$$

$$(S_4):\begin{cases} x & +y & +2z & = 4 \\ & y & +2z & = 1 \\ 2x & -y & +z & = 8 \end{cases} \quad (S_5):\begin{cases} x & - & y & - & z & = & 0 \\ 9x & - & y & + & 3z & = & 0 \\ -x & - & y & - & 2z & = & 0 \end{cases} \quad (S_6):\begin{cases} x & + & 2y & - & 3z & = & 4 \\ x & + & 3y & + & z & = & 11 \\ 2x & + & 5y & - & 4z & = & 13 \\ x & + & y & - & z & = & 3 \end{cases}$$

$$(S_7):\begin{cases} x & +y & +z & -t & = 1 \\ x & -y & -z & +t & = 2 \\ x & -y & -z & -t & = 3 \end{cases} \quad (S_8):\begin{cases} x & +2y & +2z & -t & = 3 \\ 2x & +4y & +6z & -2t & = 6 \\ -2x & -3y & -4z & +2t & = -4 \\ x & & -z & -t & = -1 \end{cases}$$

**Exercice 2 (calculatoire)** Résoudre les systèmes suivants et préciser leur rang

$$(S_5):\begin{cases} x & +y & +z & -t & = 1 \\ x & -y & -z & +t & = 2 \\ x & -y & -z & -t & = 3 \end{cases} \quad (S_6):\begin{cases} x & +2y & +2z & -t & = 3 \\ 2x & +4y & +6z & -2t & = 6 \\ -2x & -3y & -4z & +2t & = -4 \\ x & & -z & -t & = -1 \end{cases}$$

$$(S_7):\begin{cases} x & +3y & +5z & -4t & & = 1 \\ x & +3y & +3z & -2t & +w & = -1 \\ x & -2y & +z & -t & -w & = 3 \\ x & -4y & +z & +t & -w & = 3 \\ x & +2y & +z & -t & +w & = -1 \end{cases} \quad (S_8):\begin{cases} x & +\frac{1}{2}y & +\frac{1}{3}z & +\frac{1}{4}t & = 1 \\ x & -\frac{1}{3}y & +\frac{1}{2}z & +t & = 2 \\ 2x & +\frac{1}{6}y & +\frac{5}{6}z & +\frac{5}{4}t & = 3 \\ 2x & -\frac{2}{3}y & +z & +2 & = 4 \\ 4x & +\frac{7}{6}y & +\frac{3}{2}z & +\frac{7}{4}t & = 5 \end{cases}$$

{

**Exercice 3** Equilibrez la réaction chimique suivante :

$$x\mathrm{NaOH} + y\mathrm{Br_2} \longrightarrow z\mathrm{NaBrO_3} + t\mathrm{NaBr} + s\mathrm{H_2O}$$

**Exercice 4** On observe le relevé de note suivant :

| Candidat | A | B | C |
|---|---|---|---|
| Histoire géo | 12 | 6 | 16 |
| Culture Gé | 7 | 11 | 11 |
| Mathématiques | 6 | 10 | 14 |
| Moyenne | 8 | 9 | 14 |

Quels sont les coefficients associés à chaque discipline ?

**Exercice 5** En fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$, résoudre les systèmes suivants et donner le rang :

1. $\begin{cases} x+y+z=2 \\ x-y+z=m \\ -2x+4y-2z=m^2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 5x+3y=mx \\ x+3y=my \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x-y+z=m \\ x+my-z=1 \\ x-y-z=1 \end{cases}$

**Des matrices :**

**Exercice 6** Déterminer lorsqu'il existe l'inverse des matrices et précisez leur rang :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad F=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad G=\begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ -3 & -1 & 7 \end{pmatrix}$$

**Exercice 7** Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$ si les matrices suivantes sont inversibles :

$$A=\begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

**Exercice 8** Soient les matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $A^2$ et exprimer $A^2$ comme combinaison linéaire de $A$ et de $I_3$.
2. En déduire que $A$ est inversible. Exprimer $A^{-1}$ en fonction de $A$ et $I_3$.
3. Montrer que, pour tout entier naturel $n$, il existe deux réels $a_n$ et $b_n$ tels que $A^n = a_nA + b_nI_3$. Donner une relation de récurrence liant $a_{n+1}$ et $b_{n+1}$ à $a_n$ et $b_n$.
4. Montrer que $(a_n)$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2. En déduire $a_n$ et $b_n$ en fonction de $n$, puis $A^n$ en fonction de $n, A, I_3$.
5. Calculer $B^2$. En déduire $B^n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ .
6. Les formules pour $A^n$ et $B^n$ sont-elles valables pour $n = -1$ ?
7. Donner l'expression de $A$ en fonction de $B$ et de $I_3$.
8. Retrouver l'expression de $A^n$ à l'aide de la formule du Binôme ($n \in \mathbb{N}$).